1	2	3	4
B-	B-	B-	B

CALIF.
A

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA: TURNO: ☒ Ma-Vi 10-13hs ☐ Ma-Vi 16-19hs

Álgebra Lineal - 1° Cuatrimestre 2017
2° Parcial (11/07/2017)

1. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A = (v_1|v_2|v_3)$ tal que $A\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ y $B = \left(v_1 + 2v_2 | v_3 - v_1 | \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

   Sabiendo que B es inversible y que $\det(B^{-2}\cdot 3(B^t)) = 9$, calcular $\det(B)$ y $\det(A)$.

   Obs: v_1, v_2 y v_3 son vectores columnas de $\mathbb{R}^3$.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3i & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Decidir si A es diagonalizable. En tal caso, exhibir matrices D y P tal que $A = PDP^{-1}$.

   b) Sea $f_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la transformación lineal dada por $f_A(x) = Ax$. Determinar si existe un producto interno en $\mathbb{C}^3$ tal que f_A sea autoadjunta. En caso de existir, dar la expresión de $\langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{C}^3$.

3. Se define la sucesión de números enteros de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 1, \\ a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

   Hallar una fórmula general para el término a_n para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   Hallar la forma y una base de Jordan y el minimal de A.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

Álgebra lineal - 2do parcial

HOJA Nº 1/6

FECHA

1) B es inversible $\Rightarrow \det(B) \neq 0$

$$\det(B^{-2}\cdot 3(B^t)) \underset{\det(MN)=\det(M)\det(N)}{=} \det(B^{-2})\det(3(B^t)) \underset{M\in\mathbb{K}^{n\times n} \Rightarrow \det(kM)=k^n\det(M)}{=} \det((B^{-1})^2)\cdot 3^3\det(B^t) =$$

$$\underset{\substack{\det(M)=\det(M^t) \\ \forall M\in\mathbb{K}^{n\times n}}}{=} \det((B^{-1})(B^{-1}))\cdot 27\det(B) = (\det(B^{-1}))^2\cdot 27\det(B) =$$

$$= \left(\frac{1}{\det(B)}\right)^2\cdot 27\det(B) = \frac{27}{\det(B)} = 9 \Rightarrow \det(B)=3$$

$$A = [v_1 \mid v_2 \mid v_3] \Rightarrow [v_1 \mid v_2 \mid v_3]\cdot\begin{bmatrix}4\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow 4v_1+2v_2+3v_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = [v_1+2v_2 \mid v_3-v_1 \mid 4v_1+2v_2+3v_3]$$

$$\therefore \det(B) = \det([v_1+2v_2 \mid v_3-v_1 \mid 4v_1+2v_2+3v_3]) =$$

$C_2+C_1\to C_2$
$C_3-4C_1\to C_3$
El det. no cambia

$$= \det([v_1+2v_2 \mid 2v_2+v_3 \mid -6v_2+3v_3]) = \cancel{\det}$$

$C_3+3C_2\to C_3$
El det. no cambia

$$= \det([v_1+2v_2 \mid 2v_2+v_3 \mid 6v_3]) = 6\det([v_1+2v_2 \mid 2v_2+v_3 \mid v_3]) =$$

$\frac{1}{6}C_3\to C_3$, si multiplico una fila ~~por~~ o col. por k $\Rightarrow \det(M)=k\det(M)$

$C_2-C_3\to C_2$ no cambia

$$= 6\det([v_1+2v_2 \mid 2v_2 \mid v_3]) = 6\det([v_1 \mid 2v_2 \mid v_3]) = 12\det([v_1 \mid v_2 \mid v_3])$$

$C_1-C_2\to C_1$, no cambia

$\frac{1}{2}C_2\to C_2$

$$= 12\det(A) \Rightarrow 12\det(A) = 9$$ ~~⇔ det(A) = ...~~

3

$\Leftrightarrow \det(A) = 3/4$.

NOTA

2) a) A es diagonalizable $\Leftrightarrow$ existe una base B de $\mathbb{C}^3$ formada por autovectores de A, es decir

$$A v_i = \lambda_i v_i \qquad \lambda_i \in \mathbb{C} \qquad B = \{v_1, v_2, v_3\}$$

Busco los ~~autovectores~~ autovalores de A:

v tal que $\neq 0$ $Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (\lambda I - A)v = 0$

Para que ~~esta ecuación~~ el sistema $\lambda I - A = 0$ admita soluciones no triviales, det $(\lambda I - A)$ tiene que ser 0

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & i & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -3i & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\cdot \begin{vmatrix} \lambda-4 & i \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

$\overset{\shortparallel}{\chi_A(\lambda)}$

desarrollo por 3^{era} ~~fila~~ columna

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Raíces de $\chi_A(\lambda)$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$

Sé que un autovector asociado a 1 va a ser l.i. con uno asociado a 4, así que voy a tener por lo menos dos autovectores para armar B. Para saber si puede haber un tercero y que la base exista, veo dim(Nu(I-A)), ya que la dimensión del autoespacio asociado a un autovalor λ_0 siempre es menor o igual a la multiplicidad de λ_0 como raíz de χ_A y por lo tanto dim (Nu(4I-A)) = 1 < 2.

$$Nu(I-A): \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3i & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - iF_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow -3x_1 + ix_2 = 0 \underset{\cdot i}{\Leftrightarrow} -3ix_1 - x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2 = -3ix_1$$

$\therefore v \in Nu(I-A) \Leftrightarrow v = (x_1, -3ix_1, x_3)$

$\therefore E_{\lambda=1} = \langle (1,-3i,0), (0,0,1) \rangle \Rightarrow \dim(Nu(I-A)) = 2$

$\Rightarrow$ A es diagonalizable

Para armar B / A en la base B sea diagonal, busco un autovector l.i. con los generadores de Nu(I-A), o sea un generador de Nu (4I-A):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3i & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} F_1 + iF_2 \\ \\ F_3 - F_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3i & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -3i x_1 - x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \Leftrightarrow x_3 = -3ix_1 \\ \Leftrightarrow x_2 = 0 \end{array}$$

$\therefore v \in Nu(4I-A) \Leftrightarrow v = (x_1, 0, -3ix_1)$

$\Rightarrow E_{\lambda=4} = \langle (1, 0, -3i) \rangle$

NOTA Continúa en la carilla siguiente

Armo B con los generadores de los autoespacios:

$B = \{ \underbrace{(1,-3i,0),\ (0,0,1)}_{\substack{v_1, v_2 \text{ tales que} \\ Av_1 = v_1 \\ Av_2 = v_2}},\ \underbrace{(1,0,-3i)}_{\substack{v_3 \text{ tal que} \\ Av_3 = 4v_3}} \}$

Si miramos A como la matriz (en la base canónica) de $f_A: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $f_A(v) = Av$:

$[f_A]_B = \left[(f_A(v_1))_B \mid (f_A(v_2))_B \mid (f_A(v_3))_B \right] \underset{\text{son autovectores}}{=} \left[(1\cdot v_1)_B \mid (1\cdot v_2)_B \mid (1 \cdot v_3)_B \right]$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, que es la D diagonal que buscábamos.

Además, si $[f]_E = C(B,E) \cdot [f]_B \cdot C(E,B) = PDP^{-1}$, P es

$C(B,E) = \left[(v_1)_E \mid (v_2)_E \mid (v_3)_E \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3i \end{bmatrix}$

b) Quiero un producto interno $\langle , \rangle_M : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ tal que f_A sea autoadjunta.

Esto equivale a buscar una base $\tilde{B}$ de $\mathbb{C}^3$ tal que $[f_A]_{\tilde{B}} = [f_A]_{\tilde{B}}^*$ y determinar un producto interno para el que $\tilde{B}$ sea ortonormal.

Es decir, si $\tilde{B} = \{w_1, w_2, w_3\}_M$ y M es la matriz de $\langle , \rangle_M$, entonces $[\langle , \rangle_M]_{\tilde{B}} = Id_{3\times 3}$ ya que $\langle w_i, w_j \rangle_M = \delta_{ij}$ (porque $\tilde{B}$ es BON)

Observemos que ~~D~~ la D hallada en el ~~ej~~ inciso anterior es diagonal real, por lo que es hermítica y voy a poder definir $\langle , \rangle_M$.

De hecho, como $[f_A]_B = D$, la $\tilde{B}$ que queremos es B.

$\therefore Id_{3\times 3} = [\langle , \rangle_M]_B = \cancel{C(B,E) \cdot [\ C(E,B) [\langle , \rangle_M]_E C(B,E)}$
$= C(E,B)\, M\, C(B,E)$

~~Entonces $\langle (1,-3i,0), (0,0,1) \rangle$~~

~~$\bullet\ Id_{3\times 3} = [\langle , \rangle_M]_B = C(B$~~

$\bullet\ \langle x, y \rangle_M = (x)_B \cdot \underbrace{[\langle , \rangle_M]_B}_{Id_{3\times 3}} \cdot (y)_B^* = (x)_B\, (y)_B^*$

Continúa en la hoja siguiente

O sea que busco $(x)_B$.

$(x)_B = C(E,B)\cdot x$

$C(E,B) = C(B,E)^{-1}$ Invierto $C(B,E)$.

$$\cancel{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3i & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tfrac{1}{3}iF_2 \to F_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \tfrac{1}{3}i & 0 \\ 0 & 1 & -3i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$F_1 - F_2 \to F_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -\tfrac{1}{3}i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \tfrac{1}{3}i & 0 \\ 0 & 1 & -3i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] F_3 + 3iF_1 \to F_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -\tfrac{1}{3}i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \tfrac{1}{3}i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$F_1 \leftrightarrow F_2$
$F_2 \leftrightarrow F_3$ $\Rightarrow C(E,B) = \begin{bmatrix} 0 & \tfrac{1}{3}i & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\tfrac{1}{3}i & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow (x)_B = \left(\begin{bmatrix} 0 & \tfrac{1}{3}i & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\tfrac{1}{3}i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)^t = (\tfrac{1}{3}i x_2,\ x_1+x_2+x_3,\ x_1 - \tfrac{1}{3}i x_2)$$

$$\langle x,y\rangle_M = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{3}i x_2 & x_1+x_2+x_3 & x_1 - \tfrac{1}{3}i x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{3}i\overline{y_1} \\ \overline{y_1}+\overline{y_2}+\overline{y_3} \\ \overline{y_1} + \tfrac{1}{3}i\overline{y_3} \end{bmatrix}$$

¿?: $Y_i \in \mathbb{C}$

NOTA

3) Sea $b_n \in \mathbb{Z}^{2\times 1}$, $b_n = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$.

Definimos A de tal manera que $A \cdot b_n = b_{n+1}$:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A b_n = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6a_{n+1} - 9a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = b_{n+1}$$

Así,

$$b_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = A b_0$$

$$b_2 = A b_1 = A^2 b_0$$

$$\vdots$$

$$b_n = A^n b_0 = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$$

~~Con esta recurrencia podemos~~

y hallamos el término general de a_n.

Para calcular A^n genérico, buscamos los ~~autoval~~ autovalores de A y la llevamos a una forma más manejable:

~~det (A~~

$$\det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-6 & 9 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x(x-6) + 9 =$$

$$= x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \Rightarrow 3 \text{ es el único autovalor.}$$

(en el ej. 1 expliqué por qué los autovalores son las raíces de $\det(xI - A)$).

~~Alebbes~~

Esto también nos dice que A no es diagonalizable porque si $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tiene un único autovalor cuya multiplicidad como raíz de χ_M es n, M es diagonalizable sii $M = \lambda I$.

Sin embargo, como el autovalor de A está en $\mathbb{Z}$, A sí tiene una forma de Jordan en $\mathbb{Z}^{2\times 2}$.

Para hallar una base B tal que $A = C(B,E)\, J_A\, C(E,B)$ y $J_A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, miro $A - 3I$, que es nilpotente:

NOTA Continúa en la carilla siguiente

$A-3I = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ $\left((A-3I)\cdot\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right)^t = \begin{bmatrix} 9-9 \\ 3-3 \end{bmatrix}^t = (0,0) \Rightarrow (3,1) \in Nu(A-3I)$

$(A-3I)^2 = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ ~~A es ni~~ $A-3I$ es nilpotente de orden 2.

~~Entonces~~ $Nu((A-3I)^2) = \mathbb{Z}^2$.

Armo una base de Jordan: ~~$B = \{(3,1), (1,0)\}$~~
~~$\cap$ $Nu(A-3I)$ $\cap$~~

$B = \{v_1 \in Nu((A-3I)^2) \setminus Nu(A-3I),\ (A-3I)v_1\}$

$v_1 = (1,0)$, $(A-3I)v_1 = (3,1)$, $(A-3I)^2 v_1 = (0,0)$

$\therefore$ $B = \{(1,0), (3,1)\}$ es una base de Jordan y

$J_A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = C(E,B)\cdot A\cdot C(B,E)$

(ver ej. 4 para una justificación más detallada de la relación entre la forma de Jordan de A y los núcleos de $(A-\lambda I)^k$).

Además $J_A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, una diagonal y una nilpotente que conmutan (visto en clase)

y $A^n = (C(B,E)\, J_A\, C(E,B))^n = C(B,E)(J_A)^n C(E,B)$.

$C(B,E) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C(E,B)$: $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 - 3F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\Rightarrow C(E,B) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$. Ahora podemos usar estas matrices para hallar A^n

$(J_A)^n = \Big(\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{N}\Big)^n \underset{\downarrow}{=} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^{n-i} N^i \underset{\downarrow}{=} \binom{n}{0} D^n \underbrace{N^0}_{Id} + \binom{n}{1} D^{n-1} N = D^n + D^{n-1} N =$

Binomio de Newton, $DN = ND$ $\qquad N^i = 0\ \forall i \geq 2$

$\underset{\downarrow}{=} \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3^{n-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 3^{n-1} & 3^n \end{bmatrix}$

D diag.

$\therefore$ $b_n = A^n b_0 = C(B,E)(J_A)^n C(E,B)\, b_0 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 3^{n-1} & 3^n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 3^n + 3^n & 3^{n+1} \\ 3^{n-1} & 3^n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3^n & -2\cdot 3^{n+1} + 3^{n+1} \\ 3^{n-1} & -3^n + 3^n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3^n \\ 3^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$

$\therefore$ $a_n = 3^{n-1}$. $\longrightarrow$ NO CUMPLE LA RECURRENCIA

4) J_A va a ser de la forma $\begin{bmatrix} J(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(\lambda_r) \end{bmatrix}$

donde los λ_i son los autovalores de A y cada ~~bloque~~ $J(\lambda_i)$ es de tamaño $k \times k$, donde k es la máxima dimensión que puede tener el núcleo de $(A-\lambda_i I)^n$.

Primero busco los autovalores de A:

Raíces de $\chi_A(t) = \det(tI - A)$

~~$\det(tI-A) = \begin{vmatrix} t-1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{vmatrix}$~~

1^{era} ~~fila~~ columna recurs. $\qquad 1^{era}$ fila

$$\det(tI-A) = \begin{vmatrix} t-1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} t-3 & 0 & 0 \\ 1 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} =$$

$$= (t-1)^3 (t-3) \cdot \begin{vmatrix} t-1 & 0 \\ 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)^4 (t-3)^2$$

El minimal de A va a ser de la forma $(t-1)^{\alpha_1}(t-3)^{\alpha_2}$ con $\alpha_1 \leq 4$, $\alpha_2 \leq 2$ las menores potencias tales que los núcleos dejan de crecer.

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

~~dim (Nu~~
$rg(A-I) = 4 \Rightarrow \dim(A-I) = \underbrace{6}_{\dim(\mathbb{C}^6)} - 4 = 2$

$Nu(A-I) = \langle e_1, e_5 \rangle$
↳ miro qué columnas tienen sólo 0s

$$(A-I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$rg((A-I)^2) = 3 \Rightarrow$ ~~$\dim((A-I)^2) =$~~ $\dim(Nu(A-I)^2) = 3$

$Nu((A-I)^2) = \langle e_1, e_5, e_2 \rangle$

NOTA Continúa en la carilla siguiente

$$(A-I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Si $rg((A-I)^3) = 2 \Rightarrow dim((Nu(A-I)^3)) = 4$

$Nu((A-I)^3) = \langle e_1, e_5, e_2, e_3 \rangle$

$$\underset{((A-I)^2)^2}{(A-I)^4} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{(A-I)^2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{(A-I)^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} = 2(A-I)^3$$

$\Downarrow$

$\Rightarrow Nu((A-I)^4) = Nu((A-I)^3)$

$\Rightarrow dim(Nu((A-I)^k)) = dim(Nu((A-I)^{k+1})) \quad \forall k \geq 3$

$\Rightarrow m_A(t) = (t-1)^3 (t-3)^{\alpha_2}$

Ahora busco α_2:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A-3I) = 4 \Rightarrow dim(Nu(A-3I)) = 2$$

$Nu(A-3I) = \langle e_4 + e_5, e_6 \rangle$

$$(A-3I)^2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow rg((A-3I)^2) = 4 \Rightarrow dim(Nu((A-3I)^2)) = 2$

$\Rightarrow dim(Nu((A-3I)^k)) = dim(Nu((A-3I)^{k+1})) \quad \forall k \geq 1$

$\Rightarrow m_A(t) = (t-1)^3 (t-3)$

NOTA

Continúa en la hoja siguiente

Álgebra lineal - 2do parcial

HOJA N° 6/6

FECHA

La multiplicidad de cada raíz en el minimal me dice el tamaño del mayor bloque de Jordan asociado a ella, ya que corresponde a la cantidad de veces que voy a poder multiplicar un vector por A y conseguir un conjunto l.i. para armar la base.

Recordemos además que

$(A-\lambda I)v = 0 \iff A = \lambda I v$, por lo que un bloque de Jordan del autovalor λ tiene la forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 \; 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Entonces, la forma de Jordan de A es

$$J_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(1) & \\ & J(3) \end{bmatrix}$$

Para buscar una base, miro los núcleos de las potencias de $A-I$ y $A-3I$:

~~$(A-I)e_2 = -e_1$~~

$(A-I)e_3 = e_1 + e_2$ ~~$B = E$~~

$(A-I)^2 e_3 = (A-I)(e_1+e_2) = -e_1$

$(A-I)^3 e_3 = (A-I)(-e_1) = 0$

$(A-I)e_5 = 0 \Rightarrow Ae_5 = e_5$

$(A-3I)(e_4+e_5) = 0 \Rightarrow A(e_4+e_5) = 3(e_4+e_5)$

$(A-3I)e_6 = 0 \Rightarrow Ae_6 = 3e_6$

~~$\therefore$ Si $B = \{e_3, e_1+e_2+e_3,$~~

$\therefore$ Si $B = \{e_3, e_1+e_2, -e_1, e_5, e_4+e_5, e_6\} \Rightarrow C(E,B)AC(B,E) = J_A$.

NOTA